www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES — Groupe C

DURÉE : 4 heures

Ce problème est consacré à des propriétés, utilisées par les statisticiens, de fonctions des suites d'observations qui ne dépendent que de l'ensemble des valeurs obtenues (éventuellement avec leur ordre de multiplicité), mais pas de l'ordre dans lequel celles-ci sont obtenues. On peut donc, pour l'étude de telles fonctions, commencer par ranger les N observations en ordre croissant sans modifier la valeur prise. La mise en forme de cette idée fait l'objet de la partie I.

De telles fonctions servent aux statisticiens à fournir des « résumés » des suites d'observations. Ils ont donc besoin de savoir comment les valeurs prises sont affectées quand interviennent différentes modifications de la suite d'observations, en particulier quand certaines d'entre elles tendent vers l'infini, ou bien quand on rajoute une (N + 1)-ième observation. Ces études font l'objet des parties II et III, indépendantes entre elles.

Enfin il est fréquent que les observations considérées soient les valeurs prises par N variables aléatoires indépendantes et de même loi. Cet aspect probabiliste de l'étude intervient dans la partie IV, qui peut être traitée indépendamment des trois premières.

INTRODUCTION

Étant fixé un nombre entier $N (\geqslant 2)$, on note D_N l'ensemble des N-uples croissants (autrement dit

$$D_N = \{ (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N ;\ y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_N \}).$$

On note R (initiale de « rangement ») l'application de $\mathbb{R}^N$ dans lui-même qui, à tout N-uple, associe l'élément de D_N qui s'en déduit en ordonnant en croissant ses composantes.

L'image de $(x_1, \ldots, x_N)$ par R est aussi notée : $(R_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, R_N(x_1, \ldots, x_N))$

ou encore, plus brièvement, $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$.

En d'autres termes, l'égalité : $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N) = R(x_1, \ldots, x_N)$

équivaut à :

$\tilde{x}_1 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{x}_N$
il existe une permutation (c'est-à-dire une application bijective de $\{1, 2, \ldots, N\}$ dans lui-même), s, telle que, pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant N)$, on ait $\tilde{x}_i = x_{s(i)}$.

On remarque que $\tilde{x}_1 = \inf(x_1, \ldots, x_N)$ et $\tilde{x}_N = \sup(x_1, \ldots, x_N)$.

$\tilde{x}_k$ est appelé la « k-ième plus petite valeur » du N-uple $(x_1, \ldots, x_N)$.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (justifiez vos réponses).

a. R_k est une application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$;

b. R_k est continue (on pourra se limiter aux cas $N = 2$ et $N = 3$) ;

c. R_k admet des dérivées partielles à l'ordre 1 (on pourra se limiter aux cas $N = 2$ et $N = 3$).

I. APPLICATIONS SYMÉTRIQUES

On dit, comme il est naturel, que deux N-uples $(x_1, \ldots, x_N)$ et $(y_1, \ldots, y_N)$ se déduisent l'un de l'autre par permutation si et seulement si il existe une permutation s telle que, pour tout i, on ait $y_i = x_{s(i)}$.

Une application φ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ est dite symétrique si et seulement si elle vérifie :

si $(x_1, \ldots, x_N)$ et $(y_1, \ldots, y_N)$ se déduisent l'un de l'autre par permutation, on a : $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi(y_1, \ldots, y_N)$.

1. Démontrer que, pour que φ soit symétrique, il faut et il suffit que, pour tout $(x_1, \ldots, x_N)$, on ait :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N).$$

Tournez la page S.V.P.

2. Dire quelles sont, parmi les applications suivantes, celles qui sont symétriques (réponse par oui ou non, sans démonstration).

a. $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = (x_1 + \ldots + x_N)/N$.
(moyenne du N-uple, aussi notée $\bar{\mu}(x_1, \ldots, x_N)$, ou $\bar{x}$) ;

b. $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{i=N} (-1)^i x^i$;

c. $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2$ (où $\bar{x}$ est défini en *a*);

d. $\begin{cases} \varphi(x_1, \ldots, x_N) = \tilde{x}_{m+1} & \text{si } N = 2m + 1 \\ \varphi(x_1, \ldots, x_N) = (\tilde{x}_m + \tilde{x}_{m+1})/2 & \text{si } N = 2m \end{cases}$
(médiane du N-uple, aussi notée $\mu(x_1, \ldots, x_N)$).

3. Une application φ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ est dite croissante si et seulement si, pour tout couple de N-uples, $(x_1, \ldots, x_N)$ et $(y_1, \ldots, y_N)$ tels que, pour tout i, on ait $x_i \leqslant y_i$, il vient :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) \leqslant \varphi(y_1, \ldots, y_N).$$

a. Démontrer que, pour qu'une application φ, symétrique, soit croissante, il suffit qu'elle soit croissante relativement à la dernière coordonnée, c'est-à-dire que, pour tout $(N-1)$-uple $(x_1, \ldots, x_{N-1})$, l'application qui à x associe $(x_1, \ldots, x_{N-1}, x)$ soit croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour qu'une application symétrique soit croissante, il suffit que sa restriction à D_N (défini en introduction) le soit (on pourra se limiter aux cas $N = 2$ et $N = 3$).

c. Étant donné une application symétrique φ, suffit-il que sa restriction à D_N soit croissante relativement à la dernière coordonnée pour que φ soit croissante ?

4. Parmi celles des applications considérées en 2. qui sont symétriques, dire quelles sont celles qui sont croissantes (réponse par oui ou non, sans démonstration).

II. TOLÉRANCE

Soit φ une application symétrique et croissante de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$. φ est dite intolérante à gauche en k si et seulement si, quels que soient les $N-k$ nombres réels $x_{k+1}, \ldots, x_N$, vérifiant :

$$x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant x_N,$$

et quelles que soient les k suites $(x_{1,m}), \ldots, (x_{k,m})$, vérifiant :

$$\begin{cases} \text{pour tout } m (\in \mathbb{N}) \quad x_{1,m} \leqslant \ldots \leqslant x_{k,m} \leqslant x_{k+1} \\ \lim_{m \to \infty} x_{k,m} = -\infty, \end{cases}$$

on a $\lim_{m \to \infty} \varphi(x_{1,m}, \ldots, x_{k,m}, x_{k+1}, \ldots, x_N) = -\infty$.

Remarques.

Cette propriété ne fait intervenir que la restriction de φ à D_N.

Dans le cas où $k = N$, elle se simplifie en :

quelles que soient les N suites $(x_{1,m}), \ldots, (x_{N,m})$ telles que, pour tout m, on ait $x_{1,m} \leqslant \ldots \leqslant x_{N,m}$,

$$\text{si } \lim_{m \to \infty} x_{N,m} = -\infty, \text{ alors } \lim_{m \to \infty} \varphi(x_{1,m}, \ldots, x_{N,m}) = -\infty.$$

On note $G(\varphi)$ l'ensemble d'intolérance à gauche de φ, c'est-à-dire l'ensemble des entiers k, compris entre 1 et N, en lesquels φ est intolérante à gauche.

Tournez la page S.V.P.

1. Démontrer que, si k appartient à G (φ), il en est de même de tout $k' \geqslant k$.

2. Soit k_0 le plus petit élément de G (φ) (si G (φ) est vide, on convient de poser $k_0 = N + 1$). Posons $t = (k_0 - 1)/N$; t est appelé le coefficient de tolérance à gauche de φ (cette expression vient de ce que la fonction « tolère » qu'une proportion t de ses variables, comptées à partir de la gauche, tendent vers $-\infty$ sans que pour autant la valeur prise par φ tende vers $-\infty$; il existe bien sûr une notion « symétrique » de tolérance à droite, que nous n'étudierons pas ici).

   Donner le coefficient de tolérance à gauche des fonctions suivantes (on ne demande que le résultat ; aucun calcul ne doit figurer sur la copie) :

   a. inf ;

   b. sup ;

   c. $\bar{\mu}$ (moyenne : voir I.2.*a*) ;

   d. μ (médiane : voir I.2.*d*) (on distinguera selon que N est pair ou impair) ;

   e. étant fixé a, nombre réel, $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \sup(a, \inf(x_1, \ldots, x_N))$.

III. SENSIBILITÉ

Dans cette partie, on considère un couple (φ, φ') d'applications symétriques et croissantes définies respectivement sur $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^{N+1}$.

On appelle sensibilité de ce couple l'application S, de $\mathbb{R}^{N+1}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$S(x_1, \ldots, x_N, x) = \varphi'(x_1, \ldots x_N, x) - \varphi(x_1, \ldots, x_N).$$

Dans chacun des cas suivants, calculer la sensibilité et, $x_1, \ldots, x_N$ étant supposé fixé, tracer le graphe de l'application qui à x associe $S(x_1, \ldots, x_N, x)$:

1. φ et φ' sont les applications « médiane ».

2. φ et φ' sont les applications « moyenne ».

3. φ et φ' sont les applications « sup ».

IV. ÉTUDE PROBABILISTE

On considère N variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de même loi, $X_1, \ldots, X_N$, et on s'intéresse aux N variables aléatoires « rangées » :

$$\tilde{X}_1 = R_1(X_1, \ldots, X_N), \ldots, \tilde{X}_N = R_N(X_1, \ldots, X_N)$$

(autrement dit $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N) = R(X_1, \ldots, X_N)$). On évitera l'erreur qui consisterait à croire que $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N$ sont indépendantes et de même loi !

1. Soient fixés r ($\in \{1, \ldots, N\}$) et $x \in \mathbb{R}$.

   a. Exprimer l'événement $[\tilde{X}_r \leqslant x]$ à l'aide des N événements $[X_i \leqslant x]$ et des opérations ensemblistes $\cap$ et $\cup$.

   b. En déduire que, si on note F la fonction de répartition commune des variables aléatoires X_i et $\tilde{F}_r$ la fonction de répartition de $\tilde{X}_r$, on a : $\tilde{F}_r(x) = \sum_{j=r}^{j=N} C_N^j (F(x))^j (1 - F(x))^{N-j}$.

2. On suppose que F admet une dérivée continue, notée f.

   a. Démontrer que $\tilde{F}_r$ admet pour dérivée l'application $\tilde{f}_r$, définie par :

$$\tilde{f}_r(x) = N C_{N-1}^{r-1} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{N-r} f(x).$$

T. S. V. P

b. Soit k un nombre entier strictement positif. Démontrer que, si les variables aléatoires $|X_i|$ admettent un moment d'ordre k fini (qu'on notera $E(|X|^k)$), il en est de même des variables aléatoires $|\tilde{X}_r|$ (on donnera pour cela une majoration de $E(|\tilde{X}_r|^k)$ à l'aide de $E(|X|^k)$).

3. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Dans le cas où N est impair ($N = 2m + 1$), calculer la densité de $\tilde{X}_{m+1}$ (c'est-à-dire la variable aléatoire « médiane »), son espérance mathématique et sa variance.

4. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi de Cauchy positive, de densité f définie par :

$$f(x) = 2/(\pi(1 + x^2)) \quad \text{si } x \geqslant 0$$

$$f(x) = 0 \qquad\qquad\quad \text{si } x < 0.$$

a. Calculer la fonction de répartition F de cette loi, et vérifier qu'on a bien :

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

b. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty x f(x)\,dx$ est divergente, ce qui assure que cette loi n'admet pas d'espérance mathématique (inutile de justifier ce dernier membre de phrase !).

c. Calculer la densité $\tilde{f}_r$ de la loi de la variable aléatoire $\tilde{X}_r$.

d. Donner un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $x\tilde{f}_r(x)$, qui soit de la forme $K x^{r-N-1}$, où K est une constante que l'on calculera.

En déduire que, si $r < N$, la variable aléatoire $\tilde{X}_r$ admet une espérance mathématique finie.

(On constate que ceci poursuit l'étude du lien entre l'existence des moments des variables aléatoires X_i et celle des moments des variables aléatoires $\tilde{X}_r$ amorcée en IV.2.*b*).

5. Soient fixés r et s, deux nombres entiers tels que $1 \leqslant r < s \leqslant N$.

a. On note Φ l'application de $\{(t, u); 0 \leqslant t \leqslant u \leqslant 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(t, u) = \sum_{k=s}^{N} \frac{N!}{(N-k)!}(1-u)^{N-k}\left[\sum_{j=r}^{k} \frac{t^j(u-t)^{k-j}}{j!(k-j)!}\right],$$

F désignant toujours la fonction de répartition de la loi commune des X_i, démontrer que la fonction de répartition du couple $(\tilde{X}_r, \tilde{X}_s)$, notée $\tilde{F}_{r,s}$, vérifie

$$\text{si } x \leqslant y \qquad \tilde{F}_{r,s}(x, y) = \Phi(F(x), F(y))$$
$$\text{si } x \geqslant y \qquad \tilde{F}_{r,s}(x, y) = \tilde{F}_{r,s}(y, y) = \tilde{F}_s(y).$$

b. Dans le cas où la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi uniforme sur $[0, 1]$, démontrer que le couple $(\tilde{X}_r, \tilde{X}_s)$ admet pour densité la fonction $\tilde{f}_{r,s}$ vérifiant, si $x \leqslant y$,

$$\tilde{f}_{r,s}(x, y) = \frac{N!}{(r-1)!(s-r-1)!(N-s)!} x^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{N-s}.$$

En déduire, dans le cas où $N = 4$, la densité de $(\tilde{X}_2 + \tilde{X}_3)/2$ (qui est, dans ce cas, la variable aléatoire « médiane »).

(On constate que ceci fournit un complément partiel au résultat de 3. ci-dessus ; le calcul de la densité de la médiane pour N pair quelconque dépasse le cadre de ce problème.)

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail